مقاله پژوهشی

مجله ماشین‌بینایی و پردازش‌تصویر
سال یازدهم، شماره چهارم، بهار ۱۴۰۴

# آمیخته‌های توزیع دوگانه لگ-تی: برآورد پارامترها و کاربرد آن در بخش‌بندی تصاویر

عباس مهدوی

## چکیده

**خانواده توزیع‌های دوگانه لگ-تی به عنوان مدلی جدید برای مدل‌سازی داده‌های نامتقارن و کراندار در بازه $(0,1)$ پیشنهاد شده است و برخی از ویژگی‌های احتمالی آن و توسیع آن به مدل‌های آمیخته مورد بحث قرار گرفته‌اند. بر اساس نوعی نمایش تصادفی این توزیع‌ها، یک الگوریتم امید بیشینه سازی برای برآورد پارامترهای مدل پیشنهاد می‌شود. با توجه به کاربرد مدل‌های آمیخته در بخش‌بندی داده‌ها و همچنین با در نظر گرفتن مقادیر عددی پیکسل‌های تصویر در بازه $(0,1)$، آزمایشی را بر روی یک مجموعه تصویر طبیعی انجام می‌دهیم. نتایج بدست آمده، کارایی و سودمندی روش پیشنهادی را در مقایسه با توزیع‌های کراندار و غیر کراندار مرسوم نشان می‌دهد.**

## کلید واژه‌ها

**الگوریتم امید بیشینه سازی، توزیع تی، توزیع واحد، مدل‌های آمیخته**

## ۱ - مقدمه

مدل‌های آمیخته به طور گسترده در یادگیری ماشین و تشخیص الگو برای مدل‌سازی آماری استفاده شده‌اند، برای مشاهده چند مثال در این زمینه به منابع [۴-۱] رجوع شود. این مدل‌ها در کاربردهای مختلف مانند پردازش گفتار و تصویر ارزشمند هستند.

با این حال، یکی از محدودیت‌های این مدل‌ها این است که توزیع‌های آن‌ها نامحدود با دامنه تعریف $(-\infty,\infty)$ است، در حالی که در بسیاری از سناریوهای واقعی، داده‌های مشاهده شده در یک بازه محدود قرار می‌گیرند. به عنوان مثال، در تجزیه و تحلیل تصویر، هر پیکسل تصاویر ۸ بیتی دارای شدت مقیاس خاکستری بین ۰ تا ۲۵۵ است که می‌تواند با تقسیم بر ۲۵۵ به محدوده $(0,1)$ تبدیل شود. سپس این پیکسل‌ها را می‌توان به خوشه‌هایی بخش‌بندی کرد که هر خوشه دارای توزیع متفاوتی است.

توزیع بتا یک انتخاب محبوب برای مدل‌سازی درصدها و نسبت‌ها در بازه $(0,1)$ است. با این حال، توزیع‌های جایگزینی به منظور انعطاف‌پذیری بیشتر پیشنهاد شده‌اند. برخی از این توزیع‌های جایگزین عبارتند از توزیع تاپ-لئون[۱] [۵]، توزیع کوماراشوی[۲] [۶]، توزیع آرکسین[۳] [۷]، توزیع بتا تعمیم‌یافته [۸]،

این مقاله در بهمن‌ماه ۱۴۰۳ دریافت شد؛ در فروردین‌ماه بازنگری و در اردیبهشت‌ماه پذیرفته گردید.
گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران
رایانامه: a.mahdavi@vru.ac.ir

[۱] Topp-Leone
[۲] Kumaraswamy
[۳] Arcsine

توزیع استاندارد توانی دو طرفه[۱] [۹]، توزیع آرکسین مک دونالد[۲] [۱۰]، و توزیع لیندلی واحد[۳] [۱۱]. گرچه تا جایی که نویسندگان این مقاله اطلاع دارند به دلیل عدم انعطاف‌پذیری این توزیع‌ها در برازش مقادیر عددی پیکسل‌ها، این توزیع‌های در تحلیل تصویر مورد استقبال قرار نگرفته‌اند. این واقعیت منجر به ایده مدل‌های آمیخته کراندار از توزیع‌های مرسوم شد، مانند آمیخته‌های متناهی از توزیع نرمال کراندار[۴] (BNM)، تی کراندار[۵] (BTM) و تی تعمیم‌یافته کراندار[۶] (BGTM) که تکنیکی برای مدل‌سازی داده‌های مشاهده شده کراندار هستند. این مدل‌ها به طور گسترده به ویژه در پردازش سیگنال و تصویر مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱۲, ۱۳, ۱۴].

با این حال، تخمین پارامترهای این مدل‌ها به دلیل محدودیت تحمیلی بر کران‌ها، پیچیده و زمان‌بر است. به عنوان مثال، تابع چگالی احتمال توزیع نرمال کراندار در بازه $(a,b)$ به شکل زیر است [۱۲]:

$$f_{BN}(x;\mu,\sigma)=\frac{\phi(x;\mu,\sigma^2)}{\int_a^b \phi(u;\mu,\sigma^2)du},\quad a<x<b,$$
$$\mu\in\mathbb{R},\sigma>0, \qquad (۱)$$

که در آن $\phi(\cdot;\mu,\sigma^2)$ نشان دهنده تابع چگالی نرمال با میانگین $\mu$ و واریانس $\sigma^2$ است. مخرج (۱) باید به صورت عددی محاسبه شود و همچنین شامل پارامترهای $\mu$ و $\sigma$ می‌شود که منجر به پیچیدگی در برآورد بیشینه درستنمایی پارامترهای مدل می‌شود. این پیچیدگی برای سایر مدل‌ها که به صورت کراندار تعریف شده‌اند، نیز وجود دارد. برای مشاهده جزئیات بیشتر در مورد تخمین پارامترهای مدل‌های BNM، BTM و BGTM به [۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵] مراجعه شود.

یک رویکرد جایگزین برای تعریف توزیع در بازه $(a,b)$ استفاده از روش تبدیل متغیر تصادفی است. در روش تغییر متغیر سعی می‌شود که با انتخاب یک تبدیل مناسب، توزیع متغیر موجود محدود به بازه $(a,b)$ شود. با این کار پیچیدگی برآورد پارامتر که در مدل‌های کراندار مانند BNM، BTM و BGTM وجود دارد، برطرف می‌شود. یکی از این تبدیل‌ها، تبدیل دوگانه لگ[۷] است که می‌تواند برای به دست آوردن یک توزیع محدود در بازه $(\mathbf{0},\mathbf{1})$ از یک متغیر تصادفی مانند $X$ که در $(-\infty,\infty)$ تعریف شده است، استفاده شود. تبدیل دوگانه لگ که به شکل $Y\overset{d}{=}\exp(-\exp(X))$ تعریف شده است به طور گسترده در کاربردهای مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۶-۱۸]. خاطر نشان می‌شود که با برگشت این تبدیل، متغیر $X$ به شکل $X=\log(-\log Y)$ بیان می‌شود، از این رو این‌گونه متغیرها را دوگانه لگ می‌نامند. توزیع دوگانه لگ-نرمال[۸] (DLN) تبدیل دوگانه لگ یک متغیر نرمال است. این توزیع با نماد $DLN(\mu,\sigma)$ نشان داده می‌شود و دارای تابع چگالی به شکل زیر است [۱۶]:

$$f_{DLN}(x;\mu,\sigma^2)=$$
$$\frac{-1}{x\log(x)\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}(\log(-\log x)-\mu)^2\right\}, \qquad (۲)$$

که در آن $0<x<1$ است. این توزیع نامتقارن و دارای طیف گسترده‌ای از اشکال برای تابع چگالی است.

از آن‌جایی که توزیع تی-استیودنت[۹] (به اختصار به توزیع تی معروف است) یک تعمیم از توزیع نرمال با دنباله‌های سنگین‌تر است، در مواردی بهتر از توزیع نرمال عمل می‌کند. در این مقاله توزیع دوگانه لگ-تی[۱۰] (DLT) را معرفی کرده و سپس یک الگوریتم امید بیشینه سازی[۱۱] (EM) برای برآورد پارامترهای آن معرفی می‌کنیم. هم‌چنین برآورد پارامترها را برای مدل‌های آمیخته این توزیع‌ها (DLTM) بررسی می‌شود. برای نشان دادن عملکرد الگوریتم و کارایی توزیع پیشنهادی، آن را با موفقیت در بخش‌بندی تصاویر اعمال کرده‌ایم. مدل پیشنهادی توانسته است تصاویر را به دقت بخش‌بندی کند و پتانسیل آن در تجزیه و تحلیل و پردازش تصویر را به نمایش بگذارد. به طور کلی، الگوریتم پیشنهادی روشی قابل اعتماد و کارآمد برای مدل‌سازی بسیاری از مشکلات دنیای واقعی، به ویژه در زمینه تجزیه و تحلیل تصویر، ارائه می‌کند.

این مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است: ابتدا در بخش ۲، توزیع دوگانه لگ-تی را معرفی می‌کنیم. در بخش ۳، یک الگوریتم امید بیشینه سازی برای برآورد پارامترهای مدل پیشنهاد می‌کنیم. در بخش ۴، مدل‌های آمیخته توزیع پیشنهادی را تعریف می‌کنیم و الگوریتم امید بیشینه‌سازی را برای تخمین پارامترهای مدل آمیخته توسیع می‌دهیم. کاربرد مدل پیشنهادی را در بخش‌بندی تصاویر در بخش ۵ نشان داده شده است. در پایان، در بخش ۶ برخی از نکات پایانی بیان شده است.

[۱] Standard two-sided power
[۲] Mc Donald arcsine
[۳] Unit Lindley
[۴] Bounded normal mixtures
[۵] Bounded t mixtures
[۶] Bounded generalized t mixtures
[۷] Double Log
[۸] Double log-normal
[۹] Student t
[۱۰] Double log-t
[۱۱] Expectation-Maximization algorithm

## ۲- توصیف مدل

تابع چگالی توزیع دوگانه لگ-تی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f_{DLT}(y;\mu,\sigma^2,\nu)=\frac{-\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{y\log(y)\sqrt{\pi\nu\sigma^2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{\eta^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}},$$

$$0<y<1,\ \eta=\frac{\log(-\log y)-\mu}{\sigma}. \qquad (۳)$$

می‌توان نشان داد که اگر $\upsilon$ را به سمت $\infty$ میل دهیم، توزیع دوگانه لگ-نرمال (۲) بازیابی می‌شود. همچنین طبق خواص توزیع تی، به آسانی می‌توان نشان داد که توزیع پیشنهادی DLT از نمایش تصادفی زیر پیروی می‌کند:

$$Y|\tau\sim DLN(\mu,\sigma\tau^{-1/2}). \qquad (٤)$$

که در آن تابع چگالی توزیع DLN در رابطه (۲) تعریف شده است و $\tau\sim\Gamma(\nu/2,\nu/2)$ که $\Gamma(\alpha,\beta)$ نشان دهنده توزیع گاما با پارامتر شکل $\alpha$ و پارامتر مقیاس $\beta$ است. رابطه (۴) در تولید اعداد تصادفی و همچنین در مطالعه خواص نظری توزیع DLT مفید خواهد بود. همچنین واضح است که با ترکیب $Y$ و متغیر پنهان $\tau$، متغیر کامل $\boldsymbol{Y}_c=(Y,\tau)^\top$ را به دست می‌آوریم که تابع چگالی توام آن به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$f_{Y,\tau}(y,\tau)=f_\tau(\tau)f_{Y|\tau}(y)$$

$$=\frac{-(\frac{\nu}{2})^{\nu/2}}{y\log(y)\sqrt{\pi\nu\sigma^2}\Gamma(\frac{\nu}{2})}\tau^{\frac{\nu-1}{2}}exp\left\{-\frac{\tau}{2}(\nu+\eta^2)\right\},$$

$$0<y<1,\tau>0. \qquad (۵)$$

با استفاده از رابطه بالا، توزیع شرطی متغیر تصادفی $\tau$ به شرط $Y=y$ به شکل زیر نتیجه می‌شود:

$$\tau|(Y=y)\sim\Gamma\left(\tfrac{\nu+1}{2},\tfrac{\nu+\eta^2}{2}\right), \qquad (٦)$$

که در آن $\Gamma(\alpha,\beta)$ نشان دهنده توزیع گاما با میانگین $\alpha/\beta$ است. شکل (۱) نمودار برخی از توابع چگالی توزیع پیشنهادی DLT و زیر مدل آن توزیع DLN را نشان می‌دهد. این نمودارها نشان می‌دهند که توزیع DLT می‌تواند بسیاری از اشکال گوناگون با چولگی و رفتار دم مختلف، بسته به انتخاب پارامترها، ارائه دهد. در بخش بعد براساس توزیع توام (۵) یک الگوریتم امید بیشینه سازی برای برآورد پارامترهای توزیع DLT ارائه می‌دهیم.

## ۳- الگوریتم امید بیشینه سازی

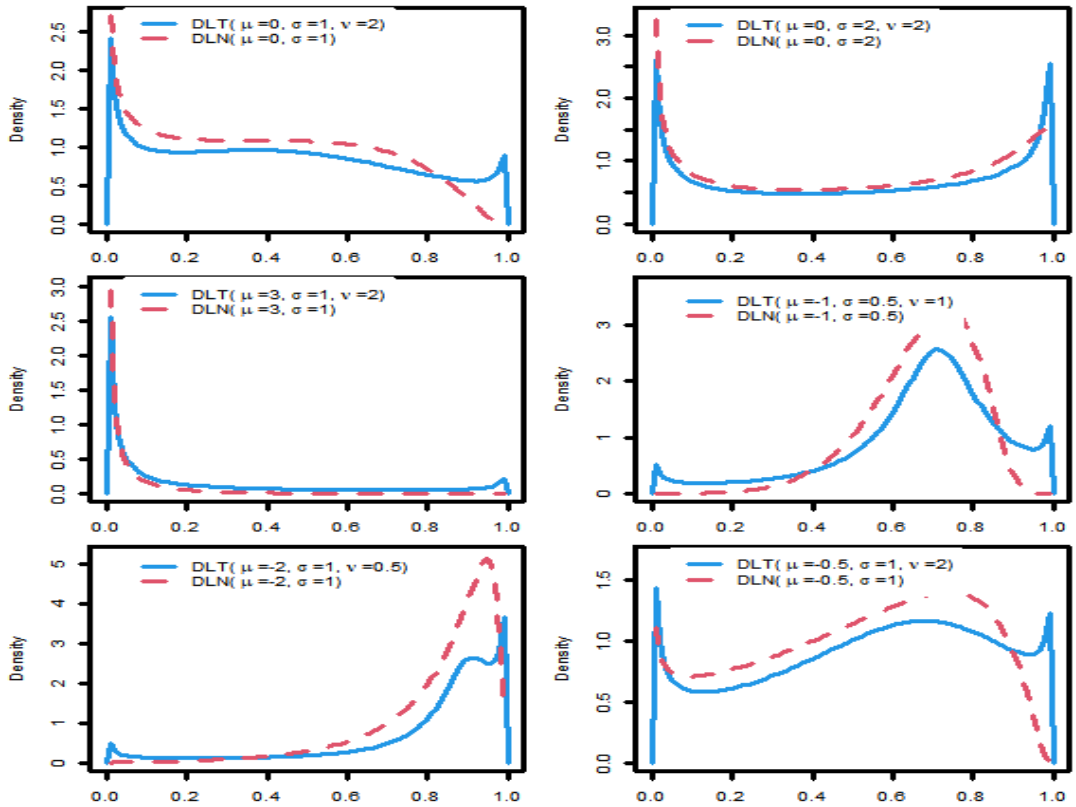
الگوریتم امید بیشینه سازی [۱۹] یک الگوریتم تکراری است که به طور گسترده برای برآورد حداکثر بیشینه درستنمایی[۱] (ML) در حضور متغیرهای گمشده، سانسور شده یا پنهان استفاده می‌شود. این الگوریتم با تکرار مراحل امید ریاضی (E) و مرحله بیشینه سازی ($M$) به نتیجه نهایی همگرا می‌شود. در مرحله E، الگوریتم مقدار مورد انتظار تابع لگاریتم درستنمایی کامل را بر اساس توزیع شرطی متغیرهای پنهان با توجه به داده‌های مشاهده شده و برآوردهای فعلی پارامترهای مدل محاسبه می‌کند. در مرحله M، برآورد پارامتر مدل با بیشینه کردن تابع هدف (Q) حاصل از مرحله E به روز می‌شود. اگرچه الگوریتم EM همگرایی را تا حداکثر تابع احتمال تضمین می‌کند، اما می‌تواند همگرایی کندی را نشان دهد یا در نقاط بهینه محلی گرفتار شود.

به منظور حل برخی از مسائل همگرایی و بهبود دقت برآوردیابی، محققان انواع مختلفی از الگوریتم EM را پیشنهاد کرده‌اند. یکی از این الگوریتم‌ها، الگوریتم امید بیشینه سازی شرطی[۲] (ECM) [۲۰] است. الگوریتم ECM گام M را با یک سری مراحل بیشینه سازی شرطی (CM) جایگزین می‌کند که در آن هر پارامتر به صورت جداگانه به حداکثر می‌رسد در حالی که بقیه پارامترها ثابت نگه داشته می‌شوند. این رویکرد می‌تواند به غلبه بر برخی محدودیت‌های الگوریتم اصلی EM کمک کند. علاوه بر این، الگوریتم امید بیشینه سازی شرطی این یا آن[۳] (ECME) [۲۱]، الگوریتم ECM را با معرفی مراحل اضافی به نام مراحل CML توسیع می‌دهد. این مراحل تابع درستنمایی مقیّد را به بیشینه می‌رسانند که منجر به همگرایی سریع‌تر و بهبود دقت برآورد می‌شود. الگوریتم‌های ECM و ECME با موفقیت در زمینه‌های مختلف از جمله آمار، یادگیری ماشین و پردازش سیگنال استفاده شده‌اند [۲۲, ۲۳].

به منظور برآورد پارامترهای مدل پیشنهادی DLT بر اساس یک نمونه تصادفی مشاهده شده $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_n)^\top$، بردار $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\dots,\tau_n)^\top$ را به عنوان بردار متغیرهای پنهان (غیر قابل مشاهده) در نظر می‌گیریم. بنابراین بردار $\boldsymbol{y}_c=(\boldsymbol{y}^\top,\boldsymbol{\tau}^\top)^\top$ بردار مشاهدات کامل است که منجر به تابع درستنمایی کامل برای برآورد پارامترهای مدل $\boldsymbol{\theta}=(\mu,\sigma,\nu)^\top$ می‌شود. تابع درستنمایی کامل بعد از حذف مقادیر ثابت به شکل زیر حاصل می‌شود:

---

[۱] Maximum likelihood
[۲] Expectation conditional maximization
[۳] Expectation conditional maximization either




**شکل ۱: برخی از اشکال مختلف توزیع‌های *DLT* و *DLN***

$$\ell_c(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}_c) = \sum_{i=1}^{n} \{\frac{\nu}{2}\log(\frac{\nu}{2}) - \log\Gamma(\frac{\nu}{2}) - \log\sigma$$

$$-\frac{1}{2}\tau_i(\nu+\eta_i^2) + \left(\frac{\nu-1}{2}\right)\log\tau_i\}, \qquad (۷)$$

که در آن $\eta_i = \frac{\log(-\log y_i)-\mu}{\sigma}$ است.

این تابع را می‌توان به منظور برآورد کردن $\boldsymbol{\theta}$ بیشینه کرد، اما از آن‌جایی که این برآوردها به برآورد متغیرهای پنهان وابسته است، آن‌ها را نامعتبر می‌سازد. به همین دلیل، در مرحله E الگوریتم EM، تابع هدف که امید ریاضی شرطی (۷) است با توجه به داده‌های مشاهده شده با استفاده از برآوردهای فعلی پارامترهای مدل $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$ که در آن بالانویس $(k)$ بیانگر برآورد $\boldsymbol{\theta}$ در تکرار $k$ام است، محاسبه می‌شود. محاسبه تابع $Q$ به امید ریاضی‌های شرطی زیر نیاز دارد که با استفاده از توزیع شرطی (۶) به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{\tau}_i = E(\tau_i|y_i,\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\hat{\nu}+1}{\hat{\nu}+\hat{\eta}_i^2}, \qquad (۸)$$

$$\hat{s}_i = E(\log\tau_i\,|y_i,\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \psi(\tfrac{\hat{\nu}+1}{2}) - \log(\tfrac{\hat{\nu}+\hat{\eta}_i^2}{2}), \qquad (۹)$$

که $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ تابع دو-گاما[1] نامیده می‌شود.

بنابراین تابع هدف به شکل زیر نتیجه می‌شود:

$$Q(\boldsymbol{\theta}|\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n} \{\frac{\nu}{2}\log(\frac{\nu}{2}) - \log\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) - \log\sigma$$

$$-\frac{1}{2}\hat{\tau}_i^{(k)}(\nu+\eta_i^2) + (\tfrac{\nu-1}{2})\hat{s}_i^{(k)}\}. \qquad (۱۰)$$

پس از انجام یکسری عملیات جبری، مراحل بیشینه سازی شرطی الگوریتم ECM را می توان به صورت زیر پیاده سازی کرد:

- **مرحله ۱:** با مشتق‌گیری از (۱۰) نسبت به $\mu$ و مساوی صفر قرار دادن آن، داریم:

$$\hat{\mu}^{(k+1)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\hat{\tau}_i^{(k)}}\sum_{i=1}^{n}\hat{\tau}_i^{(k)}\log(-\log y_i). \qquad (۱۱)$$

- **مرحله ۲:** با ثابت در نظر گرفتن $\mu = \hat{\mu}^{(k+1)}$ و مشتق از (۱۰) نسبت به $\sigma$، به روز رسانی پارامتر $\hat{\sigma}^{(k)}$ از طریق رابطه زیر حاصل می‌شود:

[1] Digamma

$$\hat{\sigma}^{(k+1)} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{\tau}_i^{(k)} (\log(-\log y_i) - \hat{\mu}^{(k+1)})^2}. \quad (۱۲)$$

حال به منظور به روز رسانی $\hat{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$، نیازمند حل یک معادله غیر خطی هستیم. اما به منظور افزایش سرعت و کارایی الگوریتم، یک رویکرد جایگزین در الگوریتم ECME، بیشینه کردن تابع درستنمایی مقیّد است که به آن گام CML گفته می‌شود.

- **گام CML:** پارامتر $\hat{\nu}^{(k)}$ از طریق بیشینه سازی تابع درستنمایی مقیّد زیر به روز رسانی می‌شود.

$$\hat{\nu}^{(k+1)} = \underset{\nu}{argmax} \sum_{i=1}^{n} log f_{DLT}\left(y_i; \hat{\mu}^{(k+1)}, \hat{\sigma}^{(k+1)}, \nu\right). \quad (۱۳)$$

خاطر نشان می‌شود که بیشینه سازی رابطه (۱۳) را می‌توان با استفاده از روشهای بهینه‌سازی عددی انجام داد. در این مقاله این بیشینه سازی از طریق تابع *optim* در نرم افزار $R$ انجام گرفته است. در نهایت، گام‌های الگوریتم فوق باید تکرار شوند تا زمانی که یک معیار همگرایی مناسب تصدیق شود. در بخش۴-۲ به چگونگی انتخاب مقادیر اولیه و معیار همگرایی الگوریتم پرداخته شده است.

## ۴- مدل‌های آمیخته از توزیع *DLT* (*DLTM*)

### ۴-۱- مدل و برآورد پارامترها

فرض کنید که $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^\top$ یک نمونه تصادفی از آمیخته‌های توزیع DLT باشد. تابع چگالی مدل آمیخته به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f_{DLTM}(y_i; \boldsymbol{\Theta}) = \sum_{j=1}^{g} \pi_j f_{DLT}(y_i; \mu_j, \sigma_j, \nu_j), \quad (۱۴)$$

که در آن $\pi_j$ ها وزن‌های آمیختگی[۱] با شرطهای $0 \le \pi_j \le 1$ و $\sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1$; هستند. خاطر نشان می‌شود که در اینجا $\boldsymbol{\Theta} = (\pi_1, \dots, \pi_{g-1}, \boldsymbol{\theta}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\theta}_g^\top)^\top$ نشان دهنده پارامترهای مدل است که $\boldsymbol{\theta}_j = (\mu_j, \sigma_j, \boldsymbol{\nu}_j)^\top$ پارامتر مولفه $j$ است.

در این مدل، متغیر $Y$ ناقص در نظر گرفته می‌شود. این ناقص بودن را می‌توان به دو منبع نسبت داد. اولین منبع، عدم آگاهی در مورد عضویت هر مشاهده در خوشه‌ها است. برای رفع این مشکل، یک بردار شاخص $\boldsymbol{Z}_i = (Z_{i1}, \dots, Z_{ig})^\top$ مورد نیاز است که در آن $Z_{ij} = 1$ اگر مشاهده $i$ متعلق به خوشه $j$ باشد و در غیر این صورت $Z_{ij} = 0$. توزیع $\mathbf{Z}_i$ از یک توزیع چند جمله‌ای با یک آزمایش و احتمالات $\pi_1, \dots, \pi_g$ پیروی می‌کند که با $\mathbf{Z}_i \sim Mult(1; \pi_1, \dots, \pi_g)$ نمایش داده می‌شود.

منبع دوم ناقص بودن مربوط به متغیر نهفته $\tau$ است که در بخش قبل مورد بحث قرار گرفت. اکنون می‌توان یک نمایش سلسله مراتبی از مدل‌های آمیخته DLTM را به شکل زیر ارائه کرد:

$$\boldsymbol{Z}_i \sim Mult(1; \pi_1, \dots, \pi_g), \quad (۱۵)$$

$$Y_i | (Z_{ij} = 1, \tau_i) \sim DLN(\mu_j, \sigma_j \tau_i^{-1/2}, \nu_j), \quad (۱۶)$$

$$\tau_i | (Y_i = y_i, Z_{ij} = 1) \sim \Gamma(\tfrac{\nu_j+1}{2}, \tfrac{\nu_j+\eta_{ij}^2}{2}), \quad (۱۷)$$

که در آن

$$\eta_{ij} = \frac{\log(-\log y_i) - \mu_j}{\sigma_j},$$

است.

براساس این نمایش سلسله مراتبی تابع درستنمایی کامل با حذف کردن مقادیر ثابت برای داده‌های کامل $\mathbf{y}_c = (\mathbf{y}^\top, \boldsymbol{\tau}^\top, \mathbf{Z}^\top)$ به شکل زیر نتیجه می‌شود:

$$\ell_c(\boldsymbol{\Theta}|\mathbf{y}_c) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{g} Z_{ij}\{\log \pi_j + \frac{\nu_j}{2}\log(\frac{\nu_j}{2}) - \log\Gamma(\frac{\nu_j}{2})$$

$$- \log\sigma_j - \frac{1}{2}\tau_i(\nu_j + \eta_{ij}^2) + \left(\frac{\nu_j - 1}{2}\right)\log\tau_i\}. \quad (۱۸)$$

امید ریاضی‌های شرطی مورد نیاز در تابع $Q$، با توجه به پارامتر فعلی $\boldsymbol{\Theta}^{(k)}$، عبارتند از

$$\hat{z}_{ij}^{(k)} = E(Z_{ij}|y_i, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}) = \frac{\hat{\pi}_j^{(k)} f_{DLT}(\mathbf{y}_i; \widehat{\boldsymbol{\theta}}_j^{(k)})}{f_{DLTM}(y_i; \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)})}, \quad (۱۹)$$

$$\hat{\tau}_{ij}^{(k)} = E\left(\tau_i | y_i, Z_{ij} = 1, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = E\left(\tau_i | y_i, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_j^{(k)}\right)$$

$$= \frac{\hat{\nu}_j^{(k)} + 1}{\hat{\nu}_j^{(k)} + \hat{\eta}_{ij}^{2(k)}}, \quad (۲۰)$$

$$\hat{s}_{ij}^{(k)} = E(\log\tau_i | y_i, Z_{ij} = 1, \widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}) = E(\log\tau_i | y_i, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_j^{(k)})$$

$$= \psi\left(\frac{\hat{\nu}_j^{(k)} + 1}{2}\right) - \log\left(\frac{\hat{\nu}_j^{(k)} + \hat{\eta}_{ij}^{2(k)}}{2}\right). \quad (۲۱)$$

بنابراین تابع هدف به شکل زیر نتیجه می‌شود:

$$Q\left(\boldsymbol{\Theta}|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{g} \hat{z}_{ij}^{(k)}\{\log\pi_j + \frac{\nu_j}{2}\log\left(\frac{\nu_j}{2}\right)$$

---

[۱] Mixing weights

$$-\log\Gamma\left(\frac{\nu_j}{2}\right)-\log\sigma_j-\frac{1}{2}\hat{t}_{ij}^{(k)}(\nu_j+\eta_{ij}^2)+\left(\frac{\nu_j-1}{2}\right)\hat{s}_{ij}^{(k)}\}. \quad (۲۱)$$

اکنون مراحل بیشینه سازی در الگوریتم ECME به شکل زیر خلاصه می‌شوند:

$$\hat{\pi}_j^{(k+1)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}, \quad (۲۲)$$

$$\hat{\mu}_j^{(k+1)}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}\hat{t}_{ij}^{(k)}}\sum_{i=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(k)}\hat{t}_i^{(k)}\log(-\log y_i), \quad (۲۳)$$

$$\hat{\sigma}_j^{(k+1)}=\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\hat{z}_{ij}}\sum_{i=1}^{n}\hat{z}_{ij}\hat{t}_i^{(k)}(\log(-\log y_i)-\hat{\mu}_j{}^{(k+1)})^2}, \quad (۲۴)$$

و پارامتر $\hat{v}_j^{(k)}$ از طریق بیشینه سازی تابع درستنمایی مقیّد زیر به روز رسانی می‌شود:

$$\hat{v}_j^{(k+1)}=\underset{v_j}{\operatorname{argmax}}\sum_{i=1}^{n}\log\left(\sum_{j=1}^{g}\hat{\pi}_j^{(k+1)}f_{DLT}(y_i;\hat{\mu}_j^{(k+1)},\hat{\sigma}_j^{(k+1)},v_j)\right). \quad (۲۵)$$

## ۴-۲- مقادیر اولیه پارامترها و همگرایی الگوریتم

الگوریتم امید بیشینه سازی نیازمند مقدار دهی اولیه مناسب برای پارامترها است. یک روش ساده برای دستیابی به مجموعه‌ای از مقادیر اولیه منطقی به شرح زیر است:

- الگوریتم k-میانگین[۱] با مجموعه‌ای تصادفی از مراکز $g$ خوشه اولیه اجرا می‌شود.
- شاخص عضویت $\hat{\mathbf{z}}_i^{(0)}=(\hat{z}_{i1}^{(0)},\dots,\hat{z}_{ig}^{(0)})^\top$ برای هر مشاهده براساس نتایج الگوریتم k-میانگین مشخص می‌شوند.
- اکنون مقادیر وزن‌های آمیختگی، میانگین‌ها و واریانس‌های هر خوشه به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{\pi}_j^{(0)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(0)}, \quad (۲۶)$$

$$\hat{\mu}_j^{(0)}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(0)}}\sum_{i=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(0)}\log(-\log y_i), \quad (۲۷)$$

$$\hat{\sigma}_j^{(0)}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(0)}}\sum_{i=1}^{n}\hat{z}_{ij}^{(0)}(\log(-\log y_i)-\hat{\mu}_j^{(0)})^2. \quad (۲۸)$$

- از آن‌جایی که با افزایش مقدار $\nu$ توزیع $DLT$ به توزیع $DLN$ نزدیک می‌شود، مقادیر اولیه برای $\hat{v}_j^{(0)}$ نیز یک مقدار نسبتا کوچک مانند ۲ یا ۵ در نظر گرفته می‌شود.

در این مقاله معیار همگرایی الگوریتم به شکل زیر در نظر گرفته شده است.

$$\left\|\frac{l(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)})}{l(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)})}-1\right\|<10^{-6}, \quad (۲۹)$$

که در آن $l(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)})$، مقدار تابع لگاریتم درستنمایی در مرحله $k$-ام است.

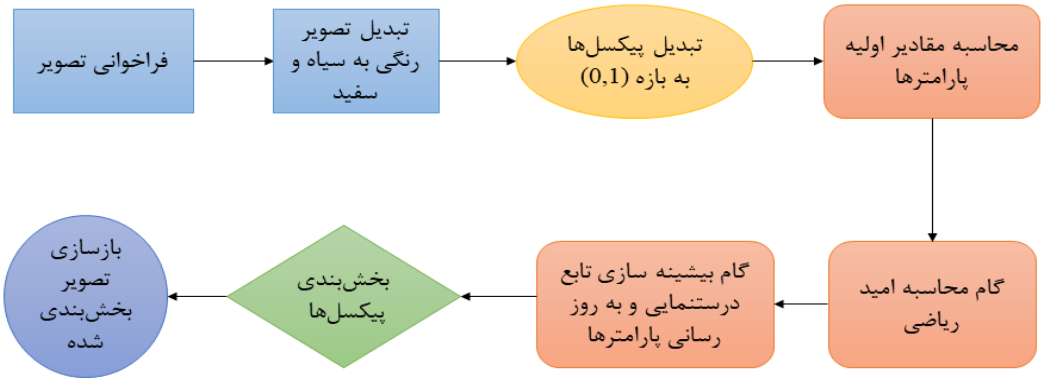
## ۵- کاربرد در بخش‌بندی تصاویر[۲]

شایان ذکر است که یکی از مهمترین کاربردهای مدل‌های آمیخته که در بخش ۴ به آن اشاره شده است، خوشه‌بندی مشاهدات است. در هر مرحله از الگوریتم امید بیشینه سازی، بردار شاخص $Z_i=(Z_{i1},\dots,Z_{ig})^\top$ طبق رابطه (۱۹) برآورد می‌شود و از آن‌جایی که این بردار نشان دهنده عضویت مشاهده $i$-ام در خوشه $j$-ام است. در پایان همگرایی الگوریتم، مشاهدات براساس مقادیر برآورد شده این شاخص، خوشه‌بندی می‌شوند (مشاهده $i$-ام به خوشه‌ای تعلق دارد که بیشترین مقدار $\hat{z}_{ij}^{(k)}$ را داشته باشد).

بخش‌بندی تصویر یکی از مراحل تحلیل تصویر است. این روش یک تصویر اولیه را به مجموعه‌ای از بخش‌ها تبدیل می‌کند که اشیاء تصویر را نشان می‌دهد. این کار، فشرده سازی داده‌ها را در مراحل دیگر و همچنین پردازش تصویر ساده‌تر می‌کند. در این بخش، از مدل‌های آمیخته پیشنهادی در بخش ۴ برای برازش مقادیر خاکستری[۳] پیکسل‌های تصویر استفاده می‌شود. بدین منظور مقادیر خاکستری پیکسل‌های تصویر به عنوان نقاط نمونه (داده‌ها) در نظر گرفته می‌شوند. هر پیکسل دارای شدت مقیاس خاکستری بین ۰ تا ۲۵۵ خواهد بود که می‌تواند با تقسیم بر ۲۵۵ به بازه (۰،۱) تبدیل شود. هر چه شدت آن کمتر باشد، رنگ تیره‌تر است و برعکس. بعد از برازش مدل بر اساس مقادیر به دست آمده $\hat{z}_{ij}^{(k)}$ هر پیکسل در یکی از $g$ خوشه بخش‌بندی می‌شود. شکل (۲) مراحل بخش‌بندی یک تصویر را با استفاده از مدل پیشنهادی، نشان می‌دهد.

[۱] K-means algorithm

[۲] Image segmentation
[۳] Grayscale




**شکل ۲: مراحل بخش‌بندی یک تصویر را با استفاده از مدل پیشنهادی**

برای بررسی عملکرد مدل‌های DLT نسبت به مدل‌های مرسوم، یک آزمایش بر روی تصاویر طبیعی برکلی[۱] [۲۴] انجام شد. این مجموعه تصاویر شامل تصاویر طبیعی با نتایج بخش‌بندی واقعی[۲] (GT) است که توسط افراد به صورت دستی ارائه می‌شود. هدف ما این است که مدل‌های پیشنهادی را برای بخش‌بندی اشیایی مانند انسان، حیوانات، درختان، ساختمان‌ها و غیره آزمایش کنیم. یک تصویر واقعی با ابعاد ۳۲۱ × ۴۸۱ پیکسل به همراه مقادیر خاکستری آن در شکل‌های (۳) (a) و (b) نشان داده شده است. هدف بخش‌بندی این تصویر به $g = 3$ قسمت است. مدل‌های مورد مقایسه عبارتند از آمیخته‌های توزیع نرمال (NM)، آمیخته‌های توزیع تی (TM)، آمیخته‌های توزیع‌های نرمال کراندار (BNM) و تی کراندار (BTM) که در بخش ۱ به آن‌ها اشاره شد. مدل‌های NM و TM با استفاده از بسته نرم افزاری *mixsmsn* در نرم افزار *R*، مدل‌های کراندار آن‌ها BNM و BTM بر اساس الگوریتم‌های ارائه شده در مراجع [۱۴, ۱۵] و مدل‌های پیشنهادی DLTM با استفاده از الگوریتم امید بیشینه سازی ارائه شده در بخش ۴ به پیکسل‌های تصویر برازش می‌دهیم. خاطر نشان می‌شود که مدل تقلیل یافته آمیخته‌های دوگانه لگ-نرمال (DLNM) با ثابت نگه داشتن $\nu = 300$ به عنوان زیر مدل DLTM نیز برازش شده است. برتری مدل DLTM به صورت بصری در شکل‌های (۳) (c-h) که عملکرد بخش‌بندی مدل‌های برازش شده را نشان می‌دهد، قابل مشاهده است.

در ادامه به منظور بررسی و مقایسه دقیق‌تر مدل‌ها، ۵۰ تصویر از ۵۰۰ تصویر برکلی انتخاب شده‌اند. این تصاویر به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که مناسب بخش‌بندی به $g = 2$ قسمت باشند.

**شکل ۳: تصویر واقعی به همراه مقیاس خاکستری آن و بخش‌بندی حاصل از مدل‌های برازش شده**

[۱] Berkeley
[۲] Ground truth

**جدول (۱) میانگین شاخص‌های ارزیابی برای ۵۰ تصویر انتخاب شده**

| مدل | میانگین شاخص ارزیابی | | |
|---|---|---|---|
| | Recall | Precision | ARI |
| K-Means | 0.675 | 0.367 | 0.590 |
| Hierarchical | 0.688 | 0.375 | 0.605 |
| DBSCAN | 0.700 | 0.390 | 0.620 |
| NM | 0.703 | 0.397 | 0.614 |
| TM | 0.709 | 0.405 | 0.617 |
| BNM | 0.719 | 0.415 | 0.653 |
| BTM | 0.726 | 0.423 | 0.665 |
| DLNM | 0.721 | 0.418 | 0.661 |
| DLTM | 0.786 | 0.446 | 0.681 |
| آماره فیشر | 4.296 | 3.704 | 4.071 |
| p-مقدار | 0.001 | 0.003 | 0.002 |

شاخص رند تعدیل‌یافته[۱] (ARI) [۲۵] که شاخصی برای سنجش میزان تطابق خوشه‌های بدست آمده از الگوریتم خوشه‌بندی و خوشه‌های واقعی (GT) است و از آن‌جایی که با یک مدل بخش‌بندی دو دویی مواجه هستیم شاخص‌های دقت[۲] و بازیابی[۳] براساس روابط زیر محاسبه شدند:

$$\text{precision} = \frac{tp}{tp+fp}, \qquad (۳۰)$$

$$recall = \frac{tp}{tp+fn}, \qquad (۳۱)$$

که $tp$، $fp$ و $fn$ به ترتیب نشان دهنده مقادیر مثبت صادق[۴]، مثبت کاذب[۵] و منفی کاذب[۶] هستند.

مقدار میانگین این شاخص‌ها برای ۵۰ تصویر انتخاب شده و مدل‌های مختلف مورد مقایسه در جدول (۱) خلاصه شده است. در این جدول نتایج حاصل از سه مدل خوشه‌بندی مرسوم k-میانگین[۷]، سلسله‌مراتبی[۸] و خوشه‌بندی مبتنی بر چگالی نقاط نزدیک به هم مقاوم در برابر نویز[۹] (DBSCAN) نیز قابل مشاهده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، سه مدل مرسوم دقت پایین‌تری نسبت به مدل‌های مبتنی بر توزیع‌های آمیخته داشته‌اند و مدل پیشنهادی DLTM در بین تمام مدل‌های مورد ارزیابی، شاخص‌های ارزیابی را به طور قابل توجهی بهبود داده است. هم‌چنین به منظور بررسی معنی داری اختلاف میانگین‌های این شاخص‌ها، مقدار آماره فیشر مربوط به تحلیل واریانس بدون احتساب سه مدل مرسوم و p-مقدار[۱۰] متناظر با آن در جدول (۱) گزارش شده است. با توجه به مقادیر p-مقدار، اختلاف معنی داری بین میانگین‌های شاخص‌های مورد بررسی وجود دارد.

## ۷- بحث و نتیجه‌گیری

خانواده‌ای از توزیع‌های آمیخته مقیاسی کراندار از توزیع نرمال و آمیخته‌های متناهی آن‌ها معرفی گردید که برای برازش داده‌های مختلف، مانند مواردی با دم‌های سنگین، کشیدگی زیاد و کراندار مناسب هستند. به منظور برآورد پارامترهای مدل، یک الگوریتم ECME پیشنهاد شده است که شامل فرم‌های صریح در مرحله ماکسیمم سازی است که منجر به محاسبات سریع‌تر و کارآمدتر می‌شود. این الگوریتم همچنین می‌تواند به عنوان جایگزینی برای تخمین پارامترها در زیر مدل DLN استفاده شود. ارزیابی یک تصویر طبیعی و یک مجموعه تصاویر انتخاب شده نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی می‌تواند بهتر از مدل‌های غیرکراندار عمل کند. علاوه بر این، الگوریتم توسعه یافته در این مطالعه را می‌توان به حالت چند متغیره از مدل‌های DLTM گسترش داد که جهت قطعه‌بندی تصاویر رنگی کاربرد دارد. این امکان در تحقیقات آتی بررسی و یافته‌های آن در یک نشریه آتی گزارش خواهد شد.

## مراجع

[1] *Y. Bazi, L. Bruzzone, and F. Melgani, "An unsupervised approach based on the generalized Gaussian model to automatic change detection in multitemporal SAR images," IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 43, no. 4, pp. 874-887, 2005.*

[2] *A. Diplaros, N. Vlassis, and T. Gevers, "A spatially constrained generative model and an EM algorithm for image segmentation," IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 18, no. 3, pp. 798-808, 2007.*

[3] *A. K. Jain, R. P. W. Duin, and J. Mao, "Statistical pattern recognition: A review," IEEE Transactions on pattern*

۱ Adjusted Rand Index
۲ Precision
۳ Recall
۴ True positive
۵ True negative
۶ False negative
۷ K-means
۸ Hierarchical Clustering
۹ Density-based spatial clustering of applications with noise
۱۰ P-value

analysis and machine intelligence, vol. 22, no. 1, pp. 4-37, 2000.

[4] N. Nguyen, Q. J. Wu, and S. Ahuja, "An extension of the standard mixture model for image segmentation," IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 21, no. 8, pp. 1326-1338, 2010.

[5] C. W. Topp and F. C. Leone, "A family of J-shaped frequency functions," Journal of the American Statistical Association, vol. 50, no. 269, pp. 209-219, 1955.

[6] P. Kumaraswamy, "A generalized probability density function for double-bounded random processes," Journal of hydrology, vol. 46, no. 1-2, pp. 79-88, 1980.

[7] B. C. Arnold and R. A. Groeneveld, "Some properties of the arcsine distribution," Journal of the American Statistical Association, vol. 75, no. 369, pp. 173-175, 1980.

[8] J. B. McDonald, "Some generalized functions for the size distribution of income," in Modeling income distributions and Lorenz curves: Springer, 2008, pp. 37-55.

[9] J. R. Van Dorp and S. Kotz, "The standard two-sided power distribution and its properties: with applications in financial engineering," The American Statistician, vol. 56, no. 2, pp. 90-99, 2002.

[10] G. M. Cordeiro and A. J. Lemonte, "The McDonald arcsine distribution: A new model to proportional data," Statistics, vol. 48, no. 1, pp. 182-199, 2014.

[11] J. Mazucheli, A. F. B. Menezes, and S. Chakraborty, "On the one parameter unit-Lindley distribution and its associated regression model for proportion data," Journal of Applied Statistics, vol. 46, no. 4, pp. 700-714, 2019.

[12] J. Lindblom and J. Samuelsson, "Bounded support Gaussian mixture modeling of speech spectra," IEEE transactions on speech and audio processing, vol. 11, no. 1, pp. 88-99, 2003.

[13] T. M. Nguyen and Q. J. Wu, "Bounded asymmetrical student's-t mixture model," IEEE transactions on cybernetics, vol. 44, no. 6, pp. 857-869, 2013.

[14] A. Mahdavi, N. Balakrishnan, and A. Jamalizadeh, "EM algorithm for bounded generalized t mixture model with an application to image segmentation," Computational and Applied Mathematics, vol. 44, no. 1, pp. 44-89, 2025.

[15] ع. مهدوی، "قطعه‌بندی تصاویر با استفاده از آمیخته‌های مقیاسی کراندار توزیع نرمال،" مجله بینایی ماشین و پردازش تصویر، ۱۴۰۳،۸۵-۹۳،۱۱(۱).

[16] B. Holland and M. Ahsanullah, "Further results on a distribution of Meinhold and Singpurwalla," The American Statistician, vol. 43, no. 4, pp. 216-219, 1989.

[17] W. L. Beaver, K. Wasserman, and B. J. Whipp, "Improved detection of lactate threshold during exercise using a log-log transformation," Journal of applied physiology, vol. 59, no. 6, pp. 1936-1940, 1985.

[18] M. Ç. Korkmaz and Z. S. Korkmaz, "The unit log–log distribution: A new unit distribution with alternative quantile regression modeling and educational measurements applications," Journal of Applied Statistics, vol. 50, no. 4, pp. 889-908, 2023.

[19] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin, "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm," Journal of the royal statistical society: series B (methodological), vol. 39, no. 1, pp. 1-22, 1977.

[20] X.-L. Meng and D. B. Rubin, "Maximum likelihood estimation via the ECM algorithm: A general framework," Biometrika, vol. 80, no. 2, pp. 267-278, 1993.

[21] C. Liu and D. B. Rubin, "The ECME algorithm: a simple extension of EM and ECM with faster monotone convergence," Biometrika, vol. 81, no. 4, pp. 633-648, 1994.

[22] M. R. Gupta and Y. Chen, "Theory and use of the EM algorithm," Foundations and Trends® in Signal Processing, vol. 4, no. 3, pp. 223-296, 2011.

[23] G. J. McLachlan and T. Krishnan, The EM algorithm and extensions. John Wiley & Sons, 2007.

[24] D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal, and J. Malik, "A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics," in Proceedings eighth IEEE international conference on computer vision. ICCV 2001, 2001, vol. 2: IEEE, pp. 416-423.

[25] L. Hubert and P. Arabie, "Comparing partitions," Journal of classification, vol. 2, pp. 193-218, 1985.

**عباس مهدوی** دانش‌آموخته‌ی کارشناسی آمار از دانشگاه شهید باهنر کرمان، کارشناسی ارشد از دانشگاه شیراز و دکتری آمار از دانشگاه شهید باهنر کرمان است. از سال ۱۳۹۰ تاکنون، وی عضو هیئت علمی گروه آمار دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان است. حوزه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان، نظریه توزیع‌ها، الگوریتم امید ماکسیمم سازی، مدل‌های آمیخته و پردازش تصویر است.