

## قطعه‌بندی تصاویر با استفاده از آمیخته‌های مقیاسی کراندار توزیع نرمال

عباس مهدوی

### چکیده

خانواده توزیع‌های آمیخته مقیاسی کراندار از توزیع نرمال به عنوان مدلی جدید برای مدل‌سازی داده‌های نامتقارن و کراندار پیشنهاد شده است. برخی از خصوصیات و ویژگی‌های احتمالی آن و توسیع آن به مدل‌های آمیخته متناهی مورد بحث قرار گرفته‌اند. بر اساس نوعی نمایش تصادفی انتخابی این توزیع‌ها، یک الگوریتم امید ماکسیمم سازی برای برآورد پارامترهای مدل پیشنهاد می‌شود. با توجه به کاربرد مدل‌های آمیخته متناهی در کلاس‌بندی داده‌ها و همچنین تأیید اثربخشی روش پیشنهادی، آزمایشی را بر روی یک مجموعه تصویر طبیعی انجام می‌دهیم. نتایج به دست آمده، کارایی و سودمندی روش پیشنهادی را در مقایسه با توزیع‌های غیر کراندار معمولی نشان می‌دهد.

### کلید واژه‌ها

آمیخته‌های مقیاسی، الگوریتم امید ماکسیمم سازی، توزیع‌های کراندار، مدل‌های آمیخته

برازش داده‌های نامتقارن مفیدتر هستند.

برای مثال اندرویز و مالوز [۱] در سال ۱۹۷۴ میلادی خانواده توزیع‌های آمیخته مقیاسی نرمال (SMN) را برای داده‌های غیر نرمال به شکل زیر معرفی کردند. متغیر تصادفی  $\mathbf{X}$  دارای توزیع SMN با پارامتر مکان  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$  و پارامتر مقیاس  $\sigma > 0$  است، اگر تابع چگالی احتمال آن به شکل زیر باشد:

$$f_{SMN}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \sigma^2, \boldsymbol{\nu}) = \int_{\mathbb{W}} \phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \tau^{-1}\sigma^2) dH_{\tau}(\boldsymbol{\tau}; \boldsymbol{\nu}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R} \quad (1)$$

که در آن  $\phi(\cdot; \boldsymbol{\mu}, \sigma^2)$  تابع چگالی احتمال توزیع نرمال با میانگین  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$  و واریانس  $\sigma^2$  است.  $\boldsymbol{\tau}$  یک متغیر مثبت است که تابع توزیع تجمعی آن با  $H_{\tau}(\boldsymbol{\tau}; \boldsymbol{\nu})$  که بردار پارامترهای آن است، مشخص می‌شود. نمایش دیگر این خانواده از توزیع‌ها به شکل  $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \sigma\boldsymbol{\tau}^{-1/2}\mathbf{Z}$  است که در آن  $\mathbf{Z}$  داری توزیع نرمال استاندارد است. این کلاس از توزیع‌ها شامل توزیع‌هایی مانند تی استیودنت ( $\boldsymbol{\tau}$ ),

### ۱ - مقدمه

توزیع نرمال نقش مهمی در تحلیل آماری و نظریه احتمال دارد و به عنوان ابزاری اساسی برای تفسیر و تجزیه و تحلیل داده‌ها عمل می‌کند. با این حال، توجه به این نکته مهم است که تنها تکیه کردن بر توزیع نرمال برای مدل‌سازی داده‌های واقعی می‌تواند منجر به خطا در نتایج شود. اخیراً، خانواده‌هایی از توزیع‌ها برای مدل‌سازی داده‌ها که انعطاف‌پذیری بیشتری را نشان می‌دهند توسط بسیاری از نویسندگان پیشنهاد شده‌اند، برخی از این خانواده‌ها می‌توانند داده‌های متقارن را برازش دهند، در حالی که برخی دیگر برای

این مقاله در فروردین‌ماه ۱۴۰۳ دریافت شد؛ در تیرماه بازنگری و سپس پذیرفته گردید.

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج)

رفسنجان، رفسنجان، ایران

رایانامه: a.mahdavi@vru.ac.ir

این مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است: ابتدا در بخش ۲، توزیع آمیخته‌های مقیاسی نرمال کراندار را معرفی می‌کنیم. در بخش ۳، یک الگوریتم ECME را برای برآورد پارامترهای مدل پیشنهاد می‌کنیم. مثال‌هایی از توزیع‌های آمیخته‌های مقیاسی نرمال کراندار در بخش ۴ ارائه شده است. در بخش ۵، آمیخته‌های متناهی از توزیع‌های پیشنهادی را تعریف می‌کنیم و الگوریتم ECME را برای تخمین پارامترهای مدل توضیح می‌دهیم. کاربرد مدل پیشنهادی را در قطعه‌بندی تصاویر در بخش ۶ نشان داده شده است. در پایان، در بخش ۷ برخی از نکات پایانی بیان شده است.

## ۲- توصیف مدل

فرض کنید  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  یک زیرمجموعه اندازه‌پذیر باشد. تابع چگالی خانواده توزیع‌های آمیخته مقیاسی نرمال کراندار به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f_{BSMN}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \sigma^2, \boldsymbol{\nu}) = \frac{f_{SMN}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \sigma^2, \boldsymbol{\nu})}{\int_{\Omega} f_{SMN}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \sigma^2, \boldsymbol{\nu}) d\mathbf{y}}, \quad \mathbf{y} \in \Omega, \quad (2)$$

بدیهی است که اگر  $\Omega = \mathbb{R}$  قرار دهیم، توزیع SMN بازیابی می‌شود. علاوه بر این، با در نظر گرفتن  $\tau = 1$  توزیع نرمال کراندار (BN) با تابع چگالی زیر حاصل می‌شود:

$$f_{BN}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \sigma^2) = \frac{\phi(\mathbf{z})}{\int_{\Omega} \phi(\mathbf{z}) d\mathbf{y}}, \quad (3)$$

که در آن  $\mathbf{z} = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})/\sigma$  و  $\phi(\cdot)$  تابع چگالی نرمال استاندارد است. با استفاده از (۱) و (۲)، به آسانی می‌توان نشان داد که توزیع BSMN از نمایش تصادفی انتخابی زیر پیروی می‌کند:

$$\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} \mathbf{X} | (\mathbf{X} \in \Omega), \quad (4)$$

که در آن  $\mathbf{X}$  از توزیع SMN در رابطه (۱) پیروی می‌کند. رابطه (۴) در تولید اعداد تصادفی و همچنین در مطالعه خواص نظری توزیع BSMN مفید خواهد بود. به منظور استخراج برخی از ویژگی‌های متغیر انتخابی  $\mathbf{Y}$  در الگوریتم امید ماکسیمم سازی، یک متغیر پنهان اضافی  $\boldsymbol{\gamma} \stackrel{d}{=} \tau | (\mathbf{X} \in \Omega)$  معرفی می‌کنیم. با ترکیب  $\mathbf{Y}$  و متغیر پنهان، متغیر کامل  $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\gamma})^T \stackrel{d}{=} (\mathbf{X}, \tau)^T | (\mathbf{X} \in \Omega)$  را به دست می‌آوریم که تابع چگالی توأم آن به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$f_{\mathbf{Y}, \boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma}) = \frac{f_{\mathbf{X}, \tau}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\gamma})}{Pr(\mathbf{X} \in \Omega)} \\ = \frac{f_{\tau}(\boldsymbol{\gamma}) f_{\mathbf{X} | \tau}(\mathbf{y})}{\int_{\Omega} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \sigma, \boldsymbol{\nu}) d\mathbf{y}}$$

لاپلاس<sup>۱</sup> (Laplace)، اسلش<sup>۲</sup> (SL)، توانی نمایی<sup>۳</sup> (EP)، نرمال آلوده<sup>۴</sup> (CN) و غیره است.

مدل‌های آمیخته متناهی<sup>۵</sup> در زمینه‌های مختلفی مانند طبقه‌بندی، خوشه‌بندی، داده‌کاوی، تجزیه و تحلیل تصویر، تشخیص الگو، یادگیری ماشین و غیره استفاده می‌شوند [۲، ۳]. با این حال، در بسیاری از زمینه‌های کاربردی، داده‌های مشاهده شده همیشه در یک بازه کراندار<sup>۶</sup> قرار می‌گیرند. این واقعیت منجر به ایده مدل‌های آمیخته کراندار از توزیع‌های مرسوم شد، مانند آمیخته‌های متناهی از توزیع نرمال کراندار (FM-BN) و تی کراندار (FM-BT) که تکنیکی برای مدل‌سازی داده‌های مشاهده شده کراندار هستند. این مدل‌ها به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته‌اند. به عنوان مثال، در پردازش تصویر پیکسل‌ها مقادیر عددی بین ۰ تا ۲۵۵ دارند که می‌توان آن‌ها را با تقسیم کردن به ۲۵۵ در بازه (0,1) در نظر گرفت. برای مطالعه جزئیات بیشتر و همچنین مقایسه این مدل‌ها با مدل‌های مرسوم به مراجع [۴، ۵] رجوع شود.

یکی دیگر از مزایای توزیع‌های کراندار، قابلیت عدم تقارن آن‌ها است که منجر به برازش بهتری به داده‌ها می‌شود. در این مقاله قصد داریم که با ادغام مزایای خانواده توزیع‌های آمیخته مقیاسی نرمال و توزیع‌های کراندار، کلاسی از توزیع‌های آمیخته مقیاسی نرمال کراندار (BSMN) با قابلیت حفظ کران داده‌ها و همچنین انعطاف‌پذیری بیشتر ارائه کنیم. برآورد پارامترهای توزیع‌های ارائه شده به دلیل پیچیدگی آن‌ها دشوار است. با الهام از مقالات مهدوی و همکاران [۶، ۷]، با استفاده از نمایش انتخابی این توزیع‌ها یک الگوریتم امید-ماکسیمم سازی برای برآورد پارامترها معرفی می‌شود.

همچنین برآورد پارامترها را برای مدل‌های آمیخته متناهی این توزیع‌ها (FM-BFSMN) بررسی می‌شود. برای نشان دادن عملکرد الگوریتم پیشنهادی، آن را با موفقیت در قطعه‌بندی تصاویر اعمال کرده‌ایم. مدل پیشنهادی توانسته است تصاویر را به دقت بخش‌بندی کند و پتانسیل آن در تجزیه و تحلیل تصویر و پردازش تصویر را به نمایش بگذارد. به طور کلی، الگوریتم پیشنهادی روشی قابل اعتماد و کارآمد برای مدل‌سازی بسیاری از مشکلات دنیای واقعی، به ویژه در زمینه تجزیه و تحلیل تصویر، ارائه می‌کند.

<sup>۱</sup> Laplace  
<sup>۲</sup> Slash  
<sup>۳</sup> Exponential Power  
<sup>۴</sup> Contaminated Normal  
<sup>۵</sup> Finite mixture models  
<sup>۶</sup> Bounded

زمینه‌های مختلف از جمله آمار، یادگیری ماشین و پردازش سیگنال استفاده شده‌اند.

$$= \frac{\gamma^{1/2} h_{\tau}(\gamma; \mathbf{v}) \phi(\gamma^{1/2} \mathbf{z})}{\int_{\Omega} f_{SMN}(\mathbf{z}; 0, 1, \mathbf{v}) d\mathbf{y}}, \quad \mathbf{y} \in \Omega, \gamma > 0. \quad (5)$$

فرض کنید  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$  بردار مشاهدات، بردار  $\mathbf{y}_c = (\mathbf{y}^T, \mathbf{v}^T)^T$  بردار متغیرهای پنهان و بردار  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$  مشاهدات کامل باشد. تابع درسنمایی کامل برای برآورد پارامترهای مدل  $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2, \delta, \mathbf{v})^T$  بعد از حذف مقادیر ثابت به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\ell_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}_c) = \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{2} \gamma_i z_i^2 + \log h_{\tau}(\gamma_i; \mathbf{v}) - \log \int_{\Omega} f_{SMN}(\mathbf{z}; 0, 1, \mathbf{v}) d\mathbf{y} \right\}, \quad (7)$$

که در آن  $\mathbf{z}_i = (y_i - \mu) / \sigma$  است.

این تابع را می‌توان به منظور برآورد کردن  $\boldsymbol{\theta}$  ماکسیم کرد، اما از آنجایی که این برآوردها به برآورد متغیرهای پنهان وابسته است، آن‌ها را نامعتبر می‌سازد. به همین دلیل، در مرحله E الگوریتم EM، تابع هدف که امید ریاضی شرطی (7) است با توجه به داده‌های مشاهده شده با استفاده از برآوردهای فعلی پارامترهای مدل  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$  که در آن بالانویس ( $k$ ) بیانگر برآورد  $\boldsymbol{\theta}$  در تکرار  $k$ ام است، محاسبه می‌شود. محاسبه تابع Q به امید ریاضی‌های شرطی زیر نیاز دارد که با استفاده از توزیع شرطی (6) به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{\gamma}_i^{(k)} = E(\gamma_i | y_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}), \quad (8)$$

$$\hat{\xi}_i^{(k)} = E(\log h_{\tau}(\gamma_i; \mathbf{v}) | y_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}). \quad (9)$$

بنابراین تابع هدف به شکل زیر نتیجه می‌شود:

$$Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) = \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{2} \hat{\gamma}_i^{(k)} z_i^2 + \hat{\xi}_i^{(k)} - \log \int_{\Omega} f_{SMN}(\mathbf{z}; 0, 1, \mathbf{v}) d\mathbf{y} \right\} \quad (10)$$

پس از انجام چند عملیات جبری، مراحل ماکسیم سازی شرطی الگوریتم ECM را می‌توان به صورت زیر پیاده سازی کرد:

مرحله ۱: با مشتق‌گیری از (10) داریم:

$$\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \hat{\gamma}_i^{(k)} z_i - n \kappa_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}, \Omega) = 0 \quad (11)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \kappa_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}, \Omega) &= \frac{\partial}{\partial \mu} \log \int_{\Omega} f_{SMN}(\mathbf{z}; 0, 1, \mathbf{v}) d\mathbf{y} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu} \log \int_{\Omega} \int_{\tau} \phi(\mathbf{z}; 0, \tau^{-1}) dH_{\tau}(\tau; \mathbf{v}) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه بالا توزیع شرطی متغیر تصادفی  $\gamma$  به شرط  $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$  به شکل زیر نتیجه می‌شود:

$$f_{\gamma | \mathbf{Y} = \mathbf{y}}(\gamma) = \frac{\gamma^{1/2} h_{\tau}(\gamma; \mathbf{v}) \phi(\gamma^{1/2} \mathbf{z})}{f_{SMN}(\mathbf{z}; 0, 1, \mathbf{v})}. \quad (6)$$

در بخش بعد براساس توزیع توام (5) یک الگوریتم امید ماکسیم سازی برای برآورد پارامترهای توزیع BSMN ارائه می‌دهیم.

### ۳- الگوریتم امید ماکسیم سازی

الگوریتم امید ماکسیم سازی<sup>۱</sup> (EM) [۸] یک الگوریتم تکراری است که به طور گسترده برای برآورد حداکثر ماکسیم درستنمایی<sup>۲</sup> (ML) در حضور متغیرهای گمشده، سانسور شده یا پنهان استفاده می‌شود. این الگوریتم با تکرار مراحل امید ریاضی (E) و مرحله ماکسیم سازی (M) به نتیجه نهایی همگرا می‌شود. در مرحله E، الگوریتم مقدار مورد انتظار تابع لگاریتم درستنمایی کامل را بر اساس توزیع شرطی متغیرهای پنهان با توجه به داده‌های مشاهده شده و برآوردهای فعلی پارامترهای مدل محاسبه می‌کند. در مرحله M، برآورد پارامتر مدل با ماکسیم کردن تابع هدف (Q) حاصل از مرحله E به روز می‌شود. اگرچه الگوریتم EM همگرایی را تا حداکثر تابع احتمال تضمین می‌کند، اما می‌تواند همگرایی کندی را نشان دهد یا در نقاط بهینه محلی گرفتار شود.

به منظور حل برخی از مسائل همگرایی و بهبود دقت برآوردیابی، محققان انواع مختلفی از الگوریتم EM را پیشنهاد کرده‌اند. یکی از این الگوریتم‌ها، الگوریتم امید ماکسیم سازی شرطی<sup>۳</sup> (ECM) [۹] است. الگوریتم ECM گام M را با یک سری مراحل ماکسیم سازی شرطی (CM) جایگزین می‌کند که در آن هر پارامتر به صورت جداگانه به حداکثر می‌رسد در حالی که بقیه پارامترها ثابت نگه داشته می‌شوند. این رویکرد می‌تواند به غلبه بر برخی محدودیت‌های الگوریتم اصلی EM کمک کند. علاوه بر این، الگوریتم امید ماکسیم سازی شرطی این یا آن<sup>۴</sup> (ECME) [۱۰] الگوریتم ECM را با معرفی مراحل اضافی به نام مراحل CML تعمیم می‌دهد. این مراحل تابع درستنمایی مقید را به حداکثر می‌رساند که منجر به همگرایی سریع‌تر و بهبود دقت تخمین می‌شود. الگوریتم‌های ECM و ECME با موفقیت در

<sup>۱</sup> Expectation maximization algorithm  
<sup>۲</sup> Maximum likelihood estimation

<sup>۳</sup> Expectation conditional maximization

<sup>۴</sup> Expectation conditional maximization either

بکارگیری قطعه‌بندی تصاویر با استفاده از آمیخته‌های مقیاسی کراندار توزیع نرمال

برای  $\tau$  حاصل می‌شوند. علاوه بر این، برای هر توزیع امید ریاضی‌های شرطی را که برای اجرای الگوریتم ECME حیاتی هستند، ارائه خواهیم کرد.

#### ۱-۴- توزیع تی کراندار

بر اساس رابطه (۲)، توزیع تی کراندار (BT) با در نظر گرفتن  $\tau \sim \Gamma(v/2, v/2)$  در رابطه (۱) حاصل می‌شود. تابع چگالی توزیع BT به شکل زیر است:

$$f_{BFT}(\mathbf{y}; \mu, \sigma^2, \nu) = \frac{t(\mathbf{z}; \nu)}{\int_{\Omega} t(\mathbf{z}; \nu) d\mathbf{y}}$$

که در آن  $t(\cdot; \nu)$  تابع چگالی توزیع تی با درجه آزادی  $\nu$  است.

طبق رابطه (۶) می‌توان نشان داد که

$$\gamma|Y = y \sim \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu+z^2}{2}\right).$$

بنابراین محاسبه  $\hat{\gamma}_i^{(k)}$  در الگوریتم EM از طریق رابطه زیر صورت می‌گیرد:

$$\hat{\gamma}_i^{(k)} = E(\gamma_i | Y_i = y_i, \hat{\theta}^{(k)}) = \frac{\hat{\nu}^{(k)} + 1}{\hat{\nu}^{(k)} + \hat{z}_i^2(k)}$$

که در آن  $\hat{z}_i^{(k)} = (y_i - \hat{\mu}^{(k)})/\hat{\sigma}^{(k)}$  است.

#### ۲-۴- توزیع لاپلاس کراندار

توزیع لاپلاس کراندار (BL) با در نظر گرفتن  $\tau$  به عنوان توزیع کای-دو با ۲ درجه آزادی در رابطه (۱) حاصل می‌شود. طبق رابطه (۲) تابع چگالی BL به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$f_{BL}(\mathbf{y}; \mu, \sigma^2) = \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{\int_{\Omega} e^{-|\mathbf{z}|} d\mathbf{y}}$$

طبق رابطه (۶) می‌توان نشان داد که  $\gamma|(Y = y) \sim GIG((z^2, 1, -1/2)$  است که نماد  $GIG$  نشان دهنده توزیع گوسین معکوس تعمیم‌یافته [۱۱] با تابع چگالی زیر است:

$$f_{GIG}(u; \kappa, \chi, \psi) = \left(\frac{\psi}{\chi}\right)^{\frac{\kappa}{2}} \frac{u^{\kappa-1} \exp\{-\frac{1}{2}\}}{2K_{\kappa}(\sqrt{\psi\chi})} \exp\{-\frac{1}{2}\} \\ (u^{-1}\chi + u\psi), \quad u > 0,$$

$$= \frac{\int_{\Omega} \int_{\tau} \tau z \phi(\mathbf{z}; 0, \tau^{-1}) dH_{\tau}(\tau; \nu) d\mathbf{y}}{\sigma \int_{\Omega} \int_{\tau} \phi(\mathbf{z}; 0, \tau^{-1}) dH_{\tau}(\tau; \nu) d\mathbf{y}} \quad (12)$$

صورت و مخرج (۱۲) را می‌توان به صورت عددی محاسبه کرد. به عنوان مثال، می‌توان با استفاده از تابع "dblquad" در بسته pracma از نرم افزار R آن‌ها را محاسبه کرد. حل معادله (۱۱) به برآورد پارامتر  $\mu$  در مرحله  $(k+1)$  منجر می‌شود:

$$\hat{\mu}^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \hat{\gamma}_i^{(k)} - n \hat{\sigma}^{2(k)} \kappa_1(\hat{\theta}^{(k)}, \Omega)}{\sum_{i=1}^n \hat{\gamma}_i^{(k)}}; \quad (13)$$

مرحله ۲: با ثابت در نظر گرفتن  $\mu = \hat{\mu}^{(k+1)}$  به روز رسانی پارامتر  $\hat{\sigma}^{(k)}$  از طریق حل معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{\sigma}^{(k+1)} = \left( \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}^{(k+1)})^2 \hat{\gamma}_i^{(k)}}{n \kappa_2(\hat{\theta}^{(k)}, \Omega)} \right)^{1/3}, \quad (14)$$

که در آن

$$\kappa_2(\hat{\theta}^{(k)}, \Omega) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \log \int_{\Omega} f_{SMN}(\mathbf{z}; 0, 1, \nu) d\mathbf{y} \\ = \frac{\partial}{\partial \sigma} \log \int_{\Omega} \int_{\tau} \phi(\mathbf{z}; 0, \tau^{-1}) dH_{\tau}(\tau; \nu) d\mathbf{y} \\ = \frac{\int_{\Omega} \int_{\tau} \tau z^2 \phi(\mathbf{z}; 0, \tau^{-1}) dH_{\tau}(\tau; \nu) d\mathbf{y}}{\sigma \int_{\Omega} \int_{\tau} \phi(\mathbf{z}; 0, \tau^{-1}) dH_{\tau}(\tau; \nu) d\mathbf{y}} \quad (15)$$

به منظور به روز رسانی  $\hat{\nu}^{(k)}$ ، نیازمند حل یک معادله غیر خطی هستیم. اما با استفاده از الگوریتم ECME و حذف نیاز برای محاسبه امید ریاضی شرطی  $\hat{s}_i^{(k)} = E(\log h_W(\gamma_i; \nu) | y_i, \hat{\theta}^{(k)})$  که ممکن است در برخی موارد پیچیده باشد، یک رویکرد جایگزین، ماکسیم کردن تابع درستنمایی مقید است که به آن گام CML گفته می‌شود.

گام CML: پارامتر  $\hat{\nu}^{(k)}$  از طریق ماکسیم سازی تابع درستنمایی مقید زیر به روز رسانی می‌شود.

$$\hat{\nu}^{(k+1)} = \underset{\nu}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^n \log f_{BSMN}(y_i; \hat{\mu}^{(k+1)}, \hat{\sigma}^{2(k+1)}, \nu). \quad (16)$$

گام‌های الگوریتم فوق باید تکرار شوند تا زمانی که یک معیار همگرایی مناسب تصدیق شود. در بخش ۵-۲ به چگونگی انتخاب مقادیر اولیه و معیار همگرایی الگوریتم پرداخته شده است.

#### ۴- مثال‌هایی از آمیخته‌های مقیاسی کراندار توزیع

##### نرمال

در این بخش، چندین نمونه از توزیع‌های BSMN را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه با در نظر گرفتن توزیع‌های مختلف

#### ۴-۴- توزیع توانی نمایی کراندار

توزیع توانی نمایی [۱۲] کلاس وسیعی از توزیع‌ها است که توزیع‌های نرمال را با دم‌های بالاتر یا پایین‌تر تعمیم می‌دهد. توزیع توانی نمایی با در نظر گرفتن  $\tau = 1/X$  در رابطه (۱) حاصل می‌شود که  $X$  دارای توزیع پایدار مثبت [۱۲] با تابع مشخصه زیر است:

$$\varphi_X(t) = \exp\{-|t|^\nu e^{-\frac{\pi}{2}\nu \text{sign}(t)}\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \nu \leq 1.$$

طبق رابطه (۲) توزیع توانی نمایی کراندار (BEP) به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$f_{BEP}(y; \mu, \sigma^2, \nu) = \frac{\exp\{-|z|^{2\nu}\}}{\int_{\Omega} \exp\{-|z|^{2\nu}\} dy}, \quad 0 < \nu \leq 1.$$

شایان ذکر است که توزیع نرمال کراندار با در نظر گرفتن  $\nu = 1$  حاصل می‌شود.

فرض کنید که توزیع  $X|X \in \Omega$  را با  $h(x; \nu)$  نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$f_{Y,X}(y, \gamma) = |J| f_{Y,X}(y, x) \propto |J| \gamma^{1/2} h(1/\gamma; \nu) \phi(\gamma^{1/2} z),$$

که در آن  $|J|$  ژاکوبین تبدیل  $\gamma = 1/X$  و  $Y = Y$  است. بنابراین

$$f(\gamma|y) \propto |J| \gamma^{1/2} h(1/\gamma; \nu) \exp\{|z|^{2\nu}/2\} \exp\{-\gamma z^2/2\} \\ \propto \exp\{(-\gamma z^2 + |z|^{2\nu})/2 + c(\gamma, \nu)\},$$

که متعلق به خانواده نمایی<sup>۲</sup> با پارامترهای متعارف  $\theta = -z^2$  و  $b(\theta) = -|z|^{2\nu} = -(-\theta)^\nu$  و پارامتر پراکندگی  $1/2$  است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که

$$\hat{p}_i^{(k)} = E(Y_i | Y_i = y_i, \hat{\theta}^{(k)}) = \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta} = \nu |z_i^{(k)}|^{2(\nu-1)}.$$

#### ۴-۵- توزیع نرمال آلوده کراندار

نمونه دیگری از توزیع‌های BSMN، توزیع نرمال آلوده کراندار (BCN) است که با در نظر گرفتن  $\tau$  به عنوان یک متغیر تصادفی گسسته به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$h_\tau(\tau, \nu) = \nu_1 \mathbb{I}_{(\tau=\nu_2)} + (1 - \nu_1) \mathbb{I}_{(\tau=1)}, \quad 0 < \nu_1 < 1, \\ 0 < \nu_2 < 1.$$

که بر اساس آن، تابع چگالی توزیع نرمال آلوده کراندار به شکل زیر نتیجه می‌شود:

که در آن  $K_\nu(\cdot)$  تابع بسل اصلاح شده از نوع سوم<sup>۱</sup> است. طبق خواص این توزیع محاسبه  $\hat{p}_i^{(k)}$  در الگوریتم EM از طریق رابطه زیر صورت می‌گیرد:

$$\hat{p}_i^{(k)} = E(Y_i | Y_i = y_i, \hat{\theta}^{(k)}) = |z_i^{(k)}|^{-1} \frac{K_{1/2}(|z_i^{(k)}|)}{K_{-1/2}(|z_i^{(k)}|)}.$$

#### ۴-۳- توزیع اسلش کراندار

نمایش تصادفی  $Y \stackrel{d}{=} \mu + \sigma \tau^{-1/2} Z_0$  را که در آن  $Z_0 \sim N(0,1)$  و  $\tau \sim \text{Beta}(\nu, 1)$  است، در نظر بگیرید. این نمایش تصادفی منجر به توزیع اسلش با تابع چگالی زیر می‌شود:

$$f_{SL}(y; \mu, \sigma^2, \nu) = \begin{cases} \frac{2^\nu \nu \Gamma(\nu + 1/2) G(z^2/2; \nu + 1/2)}{\sigma \sqrt{\pi} |z|^{2\nu+1}}, & z \neq 0 \\ \frac{\nu}{(\nu + 1/2) \sigma \sqrt{2\pi}}, & z = 0, \end{cases}$$

که در آن  $G(\cdot; r)$  تابع توزیع تجمعی گاما با مقیاس ۱ و پارامتر  $r$  شکل است.

با در نظر گرفتن  $\tau \sim \text{Beta}(\nu, 1)$  در رابطه (۱)، توزیع اسلش کراندار (BSL) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f_{BSL}(y; \mu, \sigma^2, \nu) = \frac{f_{SL}(z; 0, 1, \nu)}{\int_{\Omega} f_{SL}(z; 0, 1, \nu) dy}$$

با استفاده از رابطه (۶) توزیع شرطی زیر حاصل می‌شود:

$$f(\gamma|y) = \begin{cases} \frac{|z|^{2\nu+1} \gamma^{\nu-1/2} \exp(-\gamma z^2/2)}{2^{\nu+1/2} \Gamma(\nu + 1/2) G(z^2/2; \nu + 1/2)}, & z \neq 0 \\ (\nu + \frac{1}{2}) \gamma^{\nu-1/2}, & z = 0. \end{cases}$$

بعد از انجام چند عملیات جبری داریم:

$$\hat{p}_i^{(k)} = E(Y_i | Y_i = y_i, \hat{\theta}^{(k)}) = \begin{cases} \left( \frac{2\hat{\nu}^{(k)} + 1}{z_i^{2(k)}} \right) \frac{G\left(\frac{z_i^{2(k)}}{2}; \hat{\nu}^{(k)} + \frac{3}{2}\right)}{G\left(\frac{z_i^{2(k)}}{2}; \hat{\nu}^{(k)} + \frac{1}{2}\right)}, & z_i^{(k)} \neq 0, \\ \frac{2\hat{\nu}^{(k)} + 1}{2\hat{\nu}^{(k)} + 3}, & z_i^{(k)} = 0. \end{cases}$$

<sup>۱</sup> Modified Bessel function of the third kind

$$Y_i | \zeta_{ij} = 1 \sim BSMN(\mu_j, \sigma_j^2, \mathbf{v}_j),$$

$$f_{Y_i | Y_i = y_i, \zeta_{ij} = 1}(y_i) = \frac{y_i^{1/2} h_\tau(y_i; \mathbf{v}_j) \phi(y_i^{1/2} z_{ij})}{f_{SMN}(z_{ij}; 0, 1, \mathbf{v}_j)},$$

که در آن  $\mathbf{z}_{ij} = (y_i - \mu_j) / \sigma_j$  است. براساس این نمایش سلسه مراتبی تابع درستنمایی کامل با حذف کردن مقادیر ثابت برای داده‌های کامل  $\mathbf{y}_c = (\mathbf{y}^T, \mathbf{y}^T, \boldsymbol{\zeta}^T)$  به شکل زیر نتیجه می‌شود:

$$\ell_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}_c) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^g \zeta_{ij} \left\{ \log \omega_j - \frac{1}{2} \gamma_i z_{ij}^2 + \log h_\tau(y_i; \mathbf{v}_j) - \log \int_{\Omega_j} f_{SMN}(z_j; 0, 1, \mathbf{v}_j) dy \right\},$$

که در آن  $\mathbf{z}_j = (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_j) / \boldsymbol{\sigma}_j$  و  $\Omega_j$  کران جزء  $j$ -ام است.

امید ریاضی‌های شرطی مورد نیاز در تابع  $Q$ ، با توجه به پارامتر فعلی  $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ ، عبارتند از

$$\hat{\zeta}_{ij}^{(k)} = E(\zeta_{ij} | Y_i = y_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) = \frac{\omega_j^{(k)} f_Y(y_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}_j^{(k)})}{f_{MLX}(y_i; \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}), \quad (17)$$

$$\hat{\gamma}_{ij}^{(k)} = E(\gamma_i | Y_i = y_i, \zeta_{ij} = 1, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) = E(\gamma_i | Y_i = y_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j^{(k)}),$$

$$\begin{aligned} \hat{s}_{ij}^{(k)} &= E(\log h_\tau(y_i; \mathbf{v}_j) | Y_i = y_i, \zeta_{ij} = 1, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) \\ &= E(\log h_\tau(y_i; \mathbf{v}_j) | Y_i = y_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j^{(k)}). \end{aligned}$$

بنابراین تابع هدف به شکل زیر نتیجه می‌شود:

$$Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^g \hat{\zeta}_{ij}^{(k)} \left\{ \frac{-1}{2} \gamma_i z_{ij}^2 + \hat{s}_{ij}^{(k)} - \log \int_{\Omega_j} f_{SMN}(z_j; 0, 1, \mathbf{v}_j) dy \right\}.$$

اکنون مراحل ماکسیم سازی در الگوریتم ECME به شکل زیر خلاصه می‌شوند:

$$\hat{\omega}_j^{(k+1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\zeta}_{ij}^{(k)},$$

$$\hat{\mu}_j^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\zeta}_{ij}^{(k)} y_i \hat{\gamma}_{ij}^{(k)} - \hat{\sigma}_j^{2(k)} \kappa_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}_j^{(k)}, \Omega_j) \sum_{i=1}^n \hat{\zeta}_{ij}^{(k)}}{\sum_{i=1}^n \hat{\zeta}_{ij}^{(k)} \hat{\gamma}_{ij}^{(k)}},$$

$$\hat{\sigma}_j^{(k+1)} = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\zeta}_{ij}^{(k)} (y_i - \hat{\mu}_j^{(k+1)})^2 \hat{\gamma}_{ij}^{(k)}}{\kappa_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}, \Omega) \sum_{i=1}^n \hat{\zeta}_{ij}^{(k)}} \right)^{1/3},$$

و پارامتر  $\hat{\boldsymbol{\nu}}_j^{(k)}$  از طریق ماکسیم سازی تابع درستنمایی مقید زیر به روز رسانی می‌شود:

$$f_{BCN}(\mathbf{y}; \mu, \sigma^2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

$$= \frac{v_1 v_2^{1/2} \phi(v_2^{1/2} z) + (1 - v_1) \phi(z)}{\int_{\Omega} \{v_1 v_2^{1/2} \phi(v_2^{1/2} z) + (1 - v_1) \phi(z)\} dy}.$$

پارامتر  $\mathbf{v}_1$  را می‌توان به عنوان نسبت داده‌های پرت و  $\mathbf{v}_2$  به عنوان یک عامل مقیاس تفسیر کرد. توزیع BCN با در نظر گرفتن  $\mathbf{v}_2 = 1$  به توزیع BFN تقلیل می‌یابد.

طبق رابطه (۶) می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_i^{(k)} &= E(\gamma_i | Y_i = y_i, \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) \\ &= \frac{1 - v_1 + v_1 v_2^{3/2} \exp\{(1 - v_2) z_i^{2(k)} / 2\}}{1 - v_1 + v_1 v_2^{1/2} \exp\{(1 - v_2) z_i^{2(k)} / 2\}}. \end{aligned}$$

بنابراین تابع  $Q$  را می‌توان از طریق آن ارزیابی کرد.

## ۵- آمیخته‌های متناهی از توزیع‌های BSMN

### ۵-۱- مدل و برآورد پارامترها

فرض کنید که  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T$  یک نمونه تصادفی از آمیخته متناهی از توزیع‌های BSMN باشد. تابع چگالی مدل آمیخته به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f_{MLX}(y_i; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^g \omega_j f_{BSMN}(y_i; \mu_j, \sigma_j^2, \mathbf{v}_j),$$

که در آن  $\omega_j$  ها وزن‌های آمیختگی با شرط  $\sum_{j=1}^g \omega_j = 1; 0 \leq \omega_j \leq 1$  هستند. در اینجا نشان دهنده پارامترهای مدل است که  $\boldsymbol{\theta} = (\omega_1, \dots, \omega_{g-1}, \boldsymbol{\theta}_1^T, \dots, \boldsymbol{\theta}_g^T)^T$  است که  $\boldsymbol{\theta}_j = (\mu_j, \sigma_j, \mathbf{v}_j)^T$  پارامتر مولفه  $j$  است.

در این مدل، متغیر  $\mathbf{Y}$  ناقص در نظر گرفته می‌شود. این ناقص بودن را می‌توان به دو منبع نسبت داد. اولین منبع، عدم آگاهی در مورد عضویت هر مشاهده در خوشه‌ها است. برای رفع این مشکل، یک بردار شاخص  $\boldsymbol{\zeta}_i = (\zeta_{i1}, \dots, \zeta_{ig})^T$  مورد نیاز است که در آن  $\zeta_{ij} = 1$  اگر مشاهده  $i$  متعلق به خوشه  $j$  باشد و در غیر این صورت  $\zeta_{ij} = 0$ . توزیع  $\boldsymbol{\zeta}_i$  از یک توزیع چند جمله‌ای با یک آزمایش و احتمالات  $\omega_1, \dots, \omega_g$  پیروی می‌کند که با  $\boldsymbol{\zeta}_i \sim \text{Mult}(1; \omega_1, \dots, \omega_g)$  نمایش داده می‌شود.

منبع دوم ناقص بودن مربوط به متغیر نهفته  $\mathbf{Y}$  است که در بخش قبل مورد بحث قرار گرفت. اکنون می‌توان یک نمایش سلسله مراتبی از مدل‌های آمیخته BSMN را به شکل زیر ارائه کرد:

$$\boldsymbol{\zeta}_i \sim \text{Mult}(1; \omega_1, \dots, \omega_g),$$

می‌شود و از آنجایی که این بردار نشان دهنده عضویت مشاهده  $\mathbf{z}$  -ام در خوشه  $j$ -ام است. در پایان همگرایی الگوریتم، مشاهدات براساس مقادیر برآورد شده این شاخص، خوشه‌بندی می‌شوند (مشاهده  $\mathbf{z}$  -ام به خوشه‌ای تعلق دارد که بیشترین مقدار  $\xi_{ij}^{(k)}$  را داشته باشد).

قطعه‌بندی تصویر یکی از مراحل تحلیل تصویر است. این روش یک تصویر اولیه را به مجموعه‌ای از بخش‌ها تبدیل می‌کند که اشیاء تصویر را نشان می‌دهد. این کار، پردازش تصویر را در مراحل دیگر و همچنین فشرده سازی داده‌ها را ساده‌تر می‌کند. در این بخش، از مدل‌های آمیخته پیشنهادی در بخش ۵ برای برازش مقادیر خاکستری پیکسل‌های تصویر استفاده می‌شود. بدین منظور مقادیر خاکستری پیکسل‌های تصویر به عنوان نقاط نمونه (داده‌ها) در نظر گرفته می‌شوند. هر پیکسل دارای شدت مقیاس خاکستری بین ۰ تا ۲۵۵ خواهد بود که می‌تواند با تقسیم بر ۲۵۵ به بازه (۰،۱) تبدیل شود. هر چه شدت آن کمتر باشد، رنگ تیره‌تر است و برعکس. بعد از برازش مدل بر اساس مقادیر به دست آمده  $\xi_{ij}^{(k)}$  هر پیکسل در یکی از  $g$  خوشه گروه‌بندی می‌شود.

برای بررسی عملکرد مدل‌های BSMN نسبت به مدل‌های غیر کراندار SMN، یک آزمایش بر روی تصاویر طبیعی برکلی<sup>۱</sup> [۱۳] انجام شد. این مجموعه تصاویر شامل تصاویر طبیعی با نتایج تقسیم‌بندی واقعی<sup>۲</sup> (GT) است که توسط افراد به صورت دستی ارائه می‌شود. هدف ما این است که مدل‌های پیشنهادی را برای تقسیم‌بندی اشیایی مانند انسان، حیوانات، درختان، ساختمان‌ها و غیره آزمایش کنیم. یک تصویر واقعی (در مقیاس خاکستری و وضوح ۴۸۱ × ۳۲۱ پیکسل) به همراه GT آن در شکل‌های ۱ (a) و (b) نشان داده شده است. هدف قطعه‌بندی این تصویر به  $g = 3$  قسمت است. مدل‌های غیر کراندار SMN را با نظر گرفتن  $\Omega = (-\infty, \infty)$  و مدل‌های پیشنهادی BSMN را با در نظر گرفتن  $\Omega = (0, 1)$  با استفاده از الگوریتم امید ماکسیمم سازی ارائه شده در بخش ۵ به پیکسل‌های تصویر برازش می‌دهیم. برتری مدل BSMN به صورت بصری در شکل‌های ۱ (c-1) که عملکرد قطعه‌بندی مدل‌های برازش شده را نشان می‌دهد. همچنین برای مقایسه بهتر مدل‌ها، معیار کلاس‌بندی شاخص رند تعدیل‌یافته<sup>۳</sup> (ARI) [۱۴] نیز برای هر مدل گزارش شده است. این شاخص معیاری برای سنجش میزان تطابق خوشه‌های بدست آمده از

$$\mathbf{v}_j^{(k+1)} = \underset{\mathbf{v}_j}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^n \log \left( \sum_{j=1}^g \hat{\omega}_j^{(k+1)} f_{BSMN}(\mathbf{y}_i; \hat{\mu}_j^{(k+1)}, \hat{\sigma}_j^{2(k+1)}, \mathbf{v}_j) \right).$$

## ۵-۲- مقادیر اولیه پارامترها و همگرایی الگوریتم

الگوریتم امید ماکسیمم سازی نیازمند مقدار دهی اولیه مناسب برای پارامترها است. یک روش ساده برای دستیابی به مجموعه‌ای از مقادیر اولیه منطقی به شرح زیر است:

- الگوریتم K-means با مجموعه‌ای تصادفی از مراکز خوشه اولیه اجرا می‌شود.
- شاخص عضویت  $\xi_i^{(0)} = (\xi_{i1}^{(0)}, \dots, \xi_{ig}^{(0)})^T$  برای هر مشاهده براساس نتایج الگوریتم K-means مشخص می‌شوند.
- اکنون مقادیر وزن‌های آمیختگی، میانگین‌ها و واریانس‌های هر خوشه به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{\omega}_j^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_{ij}^{(0)},$$

$$\hat{\mu}_j^{(0)} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_{ij}^{(0)} y_i}{\sum_{i=1}^n \xi_{ij}^{(0)}},$$

$$\hat{\sigma}_j^{2(0)} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_{ij}^{(0)} (y_i - \hat{\mu}_j^{(0)})^2}{\sum_{i=1}^n \xi_{ij}^{(0)}}.$$

- مقادیر اولیه برای  $\mathbf{v}_j^{(0)}$  نیز برای توزیع‌هایی که مقدار آن در بازه  $(0, +\infty)$  یک مقدار نسبتاً کوچک مانند ۲ یا ۵ در نظر گرفته می‌شود و برای توزیع‌هایی که مقدار آن در بازه  $(0, 1)$  است، می‌توان به صورت تصادفی یک عدد در این بازه انتخاب کرد.

در این مقاله معیار همگرایی الگوریتم به شکل زیر در نظر گرفته شده است.

$$\left\| \frac{l(\hat{\theta}^{(k+1)})}{l(\hat{\theta}^{(k)})} - 1 \right\| < 10^{-6},$$

که در آن  $l(\hat{\theta}^{(k)})$ ، مقدار تابع لگاریتم درستنمایی در مرحله  $k$ -ام است.

## ۶- کاربرد در قطعه‌بندی تصاویر

شایان ذکر است که یکی از مهمترین کاربردهای مدل‌های آمیخته متناهی که در بخش ۵ به آن اشاره شده است، خوشه‌بندی مشاهدات است. در هر مرحله از الگوریتم امید ماکسیمم سازی، بردار شاخص  $\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{ig})^T$  طبق رابطه (۱۷) برآورد

<sup>۱</sup> Berkeley

<sup>۲</sup> Ground truth

<sup>۳</sup> Adjusted Rand Index

بکارگیری قطعه‌بندی تصاویر با استفاده از آمیخته‌های مقیاسی کراندار توزیع نرمال

زند تعدیل یافته شاخص‌های دقت<sup>۱</sup> و بازیابی<sup>۲</sup> براساس روابط زیر محاسبه شدند:

$$\text{precision} = \frac{tp}{tp+fp}$$

$$\text{recall} = \frac{tp}{tp+fn}$$

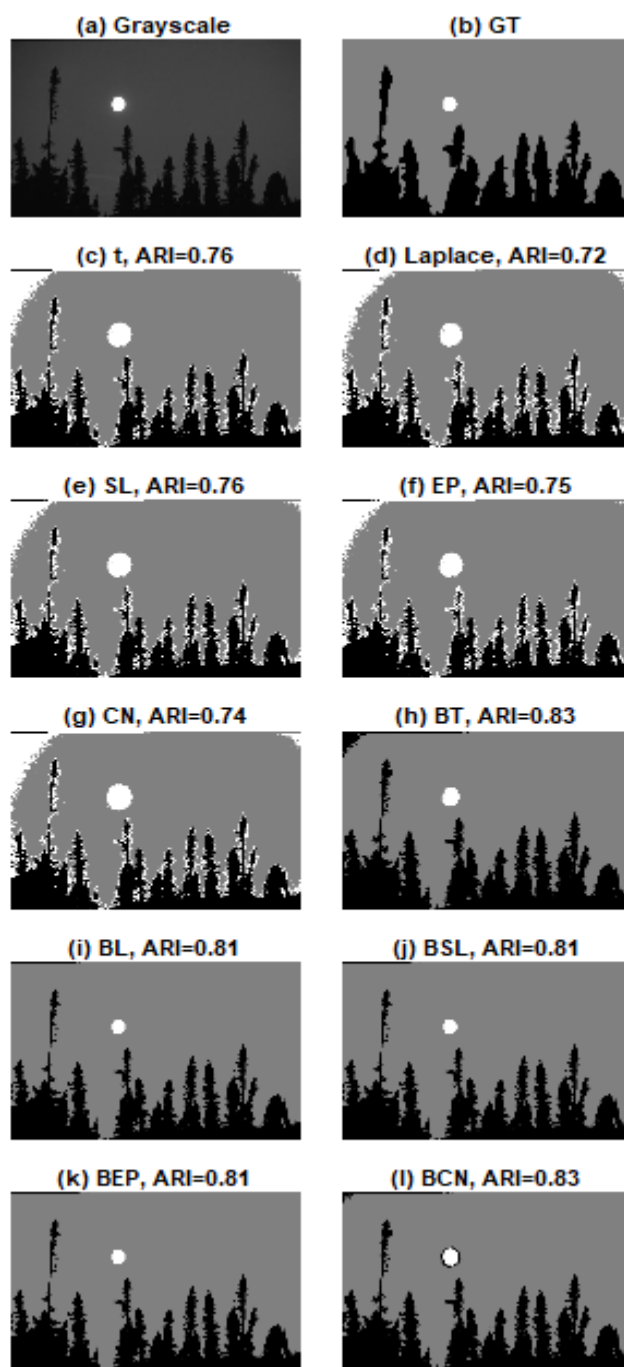
که  $tp$ ،  $fn$  و  $fp$  به ترتیب نشان دهنده مقادیر مثبت صادق<sup>۳</sup>، مثبت کاذب<sup>۴</sup> و منفی کاذب<sup>۵</sup> هستند. مقدار میانگین این شاخص‌ها برای ۳۰ تصویر انتخاب شده و مدل‌های مختلف مورد مقایسه در جدول (۱) خلاصه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مدل‌های پیشنهادی کراندار BSMN شاخص‌های ارزیابی به طور قابل توجهی بهبود داده‌اند.

جدول (۱) مقایسه مدل‌های SMN و BSMN

میانگین شاخص ارزیابی			مدل
ARI	Precision	Recall	
0.632	0.411	0.741	t
0.548	0.384	0.681	Laplace
0.586	0.392	0.694	SL
0.621	0.401	0.728	EP
0.627	0.408	0.735	CN
0.687	0.454	0.801	BT
0.658	0.422	0.724	BL
0.671	0.438	0.762	BSL
0.682	0.447	0.788	BCN

## ۷- بحث و نتیجه‌گیری

خانواده‌ای از توزیع‌های آمیخته مقیاسی کراندار از توزیع نرمال و آمیخته‌های متناهی آن‌ها معرفی گردید که برای برازش داده‌های مختلف، مانند مواردی با دم‌های سنگین، کشیدگی زیاد و کراندار مناسب هستند. به منظور برآورد پارامترهای مدل، یک الگوریتم ECME پیشنهاد شده است که شامل فرم‌های صریح در مرحله ماکسیمم سازی است که منجر به محاسبات سریع‌تر و کارآمدتر می‌شود. این الگوریتم همچنین می‌تواند به عنوان جایگزینی برای تخمین پارامترها در مدل‌های غیر کراندار SMN استفاده شود. ارزیابی یک تصویر طبیعی و یک مجموعه تصاویر انتخاب شده نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی می‌تواند بهتر از مدل‌های غیرکراندار عمل کند. علاوه بر این، الگوریتم توسعه یافته در این



شکل ۱: تصویر واقعی به همراه قطعه‌بندی GT و مدل‌های برازش شده

الگوریتم خوشه‌بندی و خوشه‌های واقعی (GT) است. این شاخص نیز که در شکل‌های ۱ (c-1) گزارش شده است، برتری مدل‌های BSMN را نشان می‌دهد.

در ادامه به منظور بررسی و مقایسه دقیق‌تر مدل‌های غیر کراندار SMN و مدل‌های کراندار BSMN، ۳۰ تصویر از ۵۰۰ تصویر برکلی انتخاب شده‌اند. این تصاویر به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که مناسب قطعه‌بندی به  $g = 2$  قسمت باشند. از آنجایی که با یک مدل کلاس‌بندی دو دویی مواجه هستیم، غیر از شاخص

<sup>۱</sup> Precision  
<sup>۲</sup> Recall  
<sup>۳</sup> True positive  
<sup>۴</sup> True negative  
<sup>۵</sup> False negative

evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics," in *Proceedings Eighth IEEE International Conference on Computer Vision. ICCV 2001*, 2001, vol. 2: IEEE, pp. 416–423.

- [14] Hubert, L., Arabie, P., "Comparing partitions," *Journal of classification*, vol. 2, pp. 193–218, 1985.



عباس مهدوی دانش‌آموخته‌ی کارشناسی آمار از دانشگاه شهید باهنر کرمان، کارشناسی ارشد از دانشگاه شیراز و دکتری آمار از دانشگاه شهید باهنر کرمان است. از سال ۱۳۹۰ تاکنون، وی عضو هیئت علمی گروه آمار دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان است. حوزه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان، نظریه توزیع‌ها، الگوریتم امید ماکسیمم سازی، مدل‌های آمیخته و پردازش تصویر است.

مطالعه را می‌توان به حالت چند متغیره از مدل‌های BSMN گسترش داد که جهت قطعه‌بندی تصاویر رنگی کاربرد دارد. این امکان در تحقیقات آتی بررسی خواهد شد و یافته‌های آن در یک نشریه آتی گزارش خواهد شد.

## مراجع

- [1] Andrews, D. F., Mallows, C. L., "Scale mixtures of normal distributions," *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, vol. 36, no. 1, pp. 99–102, 1974.
- [2] McLachlan, G. J., Basford, K. E., *Mixture models: Inference and applications to clustering*. M. Dekker New York, 1988.
- [3] McLachlan, G. J., Lee, S. X., Rathnayake, S. I., "Finite mixture models," *Annual review of statistics and its application*, vol. 6, pp. 355–378, 2019.
- [4] Lindblom, J., Samuelsson, J., "Bounded support Gaussian mixture modeling of speech spectra," *IEEE transactions on speech and audio processing*, vol. 11, no. 1, pp. 88–99, 2003.
- [5] Nguyen, T. M., Wu, Q. J., "Bounded asymmetrical student's-t mixture model," *IEEE transactions on cybernetics*, vol. 44, no. 6, pp. 857–869, 2013.
- [6] Mahdavi, A., Amirzadeh, V., Jamalizadeh, A., Lin, T. I., "Maximum likelihood estimation for scale-shape mixtures of flexible generalized skew normal distributions via selection representation," *Computational Statistics*, vol. 36, pp. 2201–2230, 2021.
- [7] Mahdavi, A., Amirzadeh, V., Jamalizadeh, A., Lin, T. I., "A Multivariate flexible skew-symmetric-normal distribution: Scale-shape mixtures and parameter estimation via selection representation," *Symmetry*, vol. 13, no. 8, p. 1343, 2021.
- [8] Dempster, A. P., Laird, N. M., Rubin, D. B., "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm," *Journal of the royal statistical society: series B (methodological)*, vol. 39, no. 1, pp. 1–22, 1977.
- [9] Meng, X. L., Rubin, D. B., "Maximum likelihood estimation via the ECM algorithm: A general framework," *Biometrika*, vol. 80, no. 2, pp. 267–278, 1993.
- [10] Liu, C., Rubin, D. B., "The ECME algorithm: a simple extension of EM and ECM with faster monotone convergence," *Biometrika*, vol. 81, no. 4, pp. 633–648, 1994.
- [11] Good, I. J., "The population frequencies of species and the estimation of population parameters," *Biometrika*, vol. 40, no. 3–4, pp. 237–264, 1953.
- [12] West, M., "On scale mixtures of normal distributions," *Biometrika*, vol. 74, no. 3, pp. 646–648, 1987.
- [13] Martin, D., Fowlkes, C., Tal, D., Malik, J., "A database of human segmented natural images and its application to